Математика **Л-230911** **29.02.2024**

Урок № 100 -101

Тема: Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона – Лейбница. Неопределенный и определенный интегралы

Срок сдачи работ до 01.03.2024

Теоретическая часть:

<u>Пример 1.</u> Найти неопределенный интеграл $\int x^3 dx$.

<u>Решение.</u>

Применяем, где $\alpha = 3$.

Получаем: $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

<u>Пример 2.</u> Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

<u>Решение.</u>

Подынтегральная функция - это дробь $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Запишем ее в виде степенной функции, а именно, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$. Затем используем, при $\alpha = -\frac{1}{3}$. Получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-1/3 + 1} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$$

<u>Пример 3.</u> Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

<u>Решение.</u>

В подынтегральной функции разделим почленно числитель на знаменатель. Затем воспользуемся неопределенного интеграла, а также, преобразовав предварительно , если нужно подынтегральную функцию к виду x^α. Получаем:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\right) dx =$$

$$\int\left(x^{1/6}+\frac{2}{x^{1/2}}-3\right)\,dx=\int x^{1/6}dx+\int\frac{2}{x^{1/2}}\,dx-3\int dx=\frac{x^{1+1/6}}{1+1/6}+2\frac{x^{1-1/2}}{1-1/2}-3x+C=$$

$$=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+4\sqrt{x}-3x+C$$

<u>Пример 4.</u> Найти интеграл $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$.

Решение.

Этот интеграл не является табличным. Преобразуем числитель следующим образом: $x^2=x^2+1-1$, затем разделим числитель на знаменатель почленно. Получим:

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-arctgx+C.$$

<u>Пример 5:</u> *Решение:*

$$\int ctg2xdx=\int\frac{\cos 2xdx}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+C,\ \text{где}\ C=const$$

<u>Пример 6:</u> *Решение:*

$$\int tg^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\int\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}-1\right)dx=$$

$$=2\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}-\int dx=2tg\frac{x}{2}-x+C,\ \text{где}\ C=const$$

<u>Пример 7:</u> *Решение:*

$$\int\sin^2\frac{3x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 3x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)+C,\ \text{где}\ C=const$$

Пример 8: *Решение:*

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C, \text{где } C = const$$

Пример 9.Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 2x^2 dx$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2 dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Пример 10. Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx$

Решение:

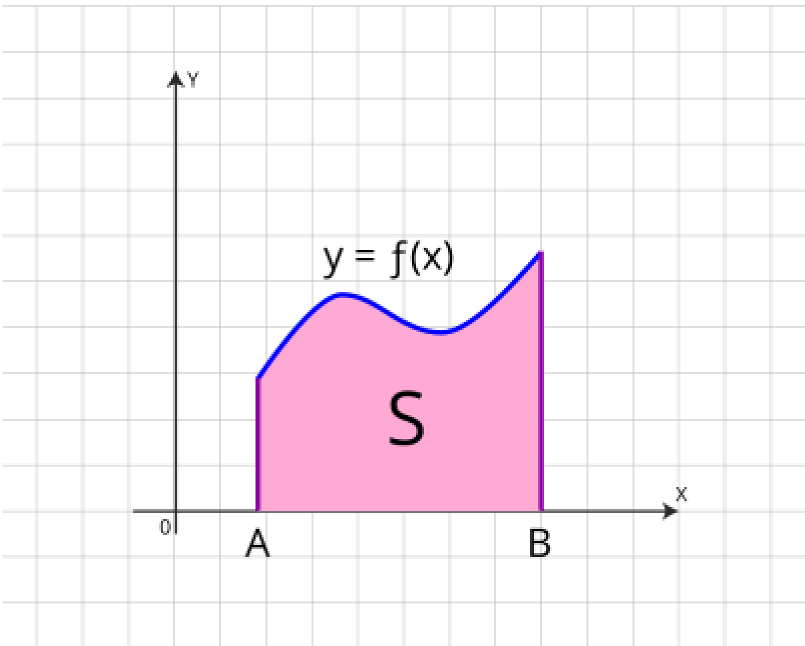
$$\int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^4 dx + 2\int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^4 + 2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^4 \overset{(3)}{=}$$

$$= 8(4-(-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3 - (-2)^3) = 8\cdot 6 + (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) =$$

$$= 48 + 12 - 24 = 36$$

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [a;b] знака функции f(x), прямыми x=a, x=b и отрезком [a;b].

Отрезок [a;b] называют основанием этой криволинейной трапеции



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

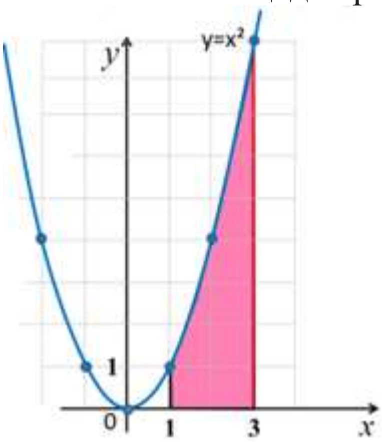
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

формула Ньютона – Лейбница

Если в задаче требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, то ответ всегда будет положительный. Если требуется, используя чертеж, вычислить интеграл, то его значение может быть любым (зависит от расположения криволинейной трапеции).

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

№1. Найти площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке



Решение

Для вычисления площади криволинейной трапеции воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница.

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

$$S=\int_1^3 x^2dx=F(3)-F(1)=$$

$$=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=8\frac{2}{3}(кв.ед)$$

Ответ: $8\frac{2}{3}$

№2. Вычислить определенный интеграл:

Решение:

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Сначала находим первообразную функцию F(x). Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: F(b).

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: F(a).

Рассчитываем разность F(b) - F(a), это и будет ответ.

$$1)\int_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$$

$$3)\int_{-2}^{3}\frac{2}{(x+3)^2}dx=-2(x+3)^{-1}\Big|_{-2}^{3}=-\frac{1}{3}+2=1\frac{2}{3}$$

№3. Найти площадь криволинейной трапеции $(x-1)^2$, ограниченной линиями x=2 и x=1, осью 0x

Решение:

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Сначала находим первообразную функцию F(x). Далее подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: F(b).

Затем подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: F(a).

Рассчитываем разность F(b) - F(a), это и будет ответ.

$$S=\int_1^2 (x-1)^2dx=\frac{(2-1)^3}{3}-\frac{(1-1)^3}{3}=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

Домашнее задание:

1. Изучить предложенный материал, обратив внимание на правила оформления и вычисления интеграла (Неопределенного и определенного).

2. Рассмотреть понятие криволинейной трапеции и правила вычисления ее площади.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, предварительно сделав рисунок. Задание №1-2 оформить в тетрадях

$$1)\ y = x^2\ (x \geq 0),\ y = 1,\ y = 4,\ x = 0$$

$$2)\ y = x^2 - 4x + 8,\ y = 3x^2 - x^3,\ если\ x \in [-2;3]$$

$$3)\ y = 3x + 1,\ y = 9 - x$$

$$4)\ y = -x - 4x^2 + 4,\ y = 10,\ x = -3,\ x = 0$$

$$5)\ y = x,\ y = 5 - x,\ x = 1,\ x = 2$$

$$6)\ y = x^2 - 4x + 2,\ y = x - 2$$

$$7)\ y = \sin\ x,\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{3}$$